

# Analisi Matematica

Test di esempio, 25 ottobre 2019

**Domanda 1** Sia  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definita da  $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{1+x^2} & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0. \end{cases}$  Risulta che

- A)  $f$  è limitata ma non ha minimo      B)  $f$  non è limitata  
C)  $f$  ha minimo      D)  $f$  è monotona sulla semiretta  $(-\infty, 0]$

C

**Domanda 2** Sia  $f : (-1, 1) \rightarrow \mathbb{R}$  definita da  $f(x) = \sin|x| \log(1+x)$ . Risulta che

- A)  $f$  non è derivabile in 0      B)  $f$  è pari  
C) il grafico di  $f$  ha tangente orizzontale per  $x = 0$       D) 0 è un punto di minimo locale per  $f$

C

**Domanda 3** Sia  $A = \{x \in \mathbb{R} : e^{-x} \geq e^x\}$ . Risulta che

- A)  $\inf(A) = 0$       B)  $A$  è l'insieme vuoto  
C)  $\sup(A) = +\infty$       D)  $\sup(A) = 0$

D

**Domanda 4** La funzione  $f : \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \rightarrow \mathbb{R}$  definita da  $f(x) = \frac{x \sin(3x)}{\sin^2(2x)}$

- A) ha minimo ma non ha massimo      B) è limitata ma non ha né massimo né minimo  
C) non è limitata né superiormente né inferiormente      D) è limitata superiormente ma non inferiormente

D

**Domanda 5**

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \sin x \sin \frac{1}{x} =$$

- A) 1      B) non esiste      C)  $+\infty$       D) 0

D

**Domanda 6** L'insieme  $A = \{x \in \mathbb{R} : x^7 + 3e^x + \log|x| < 0\}$

- A) è limitato      B) non è limitato né superiormente né inferiormente  
C) è limitato superiormente ma non inferiormente      D) è limitato inferiormente ma non superiormente

C

**Domanda 7** La funzione  $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  definita da  $f(x) = \frac{\sqrt{1+x^2} - 1}{e^{(x^3)} - 1}$

- A) ha massimo      B) è limitata ma non ha massimo  
C) è limitata superiormente ma non inferiormente      D) non ha né massimo né minimo

D

**Domanda 8**

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt[4]{1 + \frac{1}{x}} - 1}{(\sin x)^2 + 1} \left(1 - \cos \frac{1}{x}\right) =$$

- A) 0      B)  $+\infty$       C)  $-\infty$       D)  $\frac{1}{32}$

A

**Domanda 9** La funzione  $f(x) = \frac{\log x}{x-1}$

- A) ha due asintoti verticali e un asintoto orizzontale      B) ha un asintoto verticale e uno obliquo  
C) non ha asintoti      D) ha un asintoto verticale e uno orizzontale

D

**Domanda 10** La funzione  $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  definita da  $f(x) = \frac{2 \cos x - \sin(x^2) - 2}{x^3}$

- A) è limitata inferiormente ma non superiormente      B) è limitata  
C) è limitata superiormente ma non inferiormente      D) non è limitata né inferiormente né superiormente

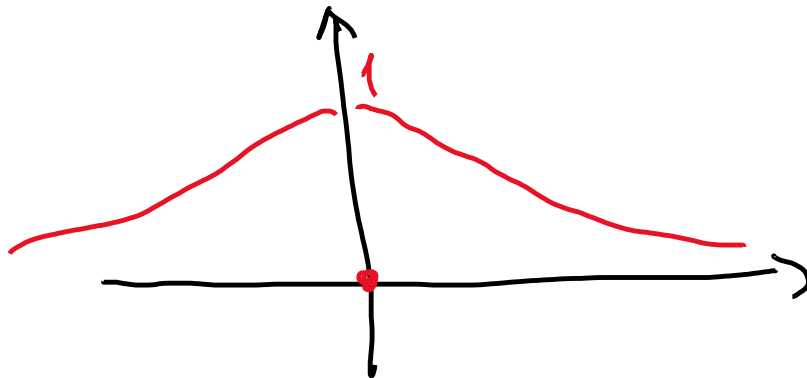
C

Domanda 1)  $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{1+x^2} & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$

$f$  è pari  $f(-x) = f(x)$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \frac{1}{\infty} = 0$

$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 1$



$f(x) \geq 0 \quad \forall x \quad f(0) = 0.$

Domanda 2)  $f: (-1, 1) \rightarrow \mathbb{R}$

$f(x) = \sin|x| \log(1+x)$

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin|x| \log(1+x) - 0}{x - 0}$

$= \lim_{x \rightarrow 0} \underbrace{\sin|x|}_{\downarrow 0} \underbrace{\frac{\log(1+x)}{x}}_{\rightarrow 1} = 0$

$\Rightarrow f'(0) = 0$

Domanda 3)  $A = \{x \in \mathbb{R} : e^{-x} \geq e^x\}$

$$e^{-x} \geq e^x \Leftrightarrow 1 \geq e^{2x}$$

$$\Leftrightarrow 0 \geq 2x \Leftrightarrow x \leq 0$$

$$A = (-\infty, 0] \Rightarrow \sup(A) = 0.$$

Domanda 4)  $f: (0, \frac{\pi}{2}) \rightarrow \mathbb{R}$

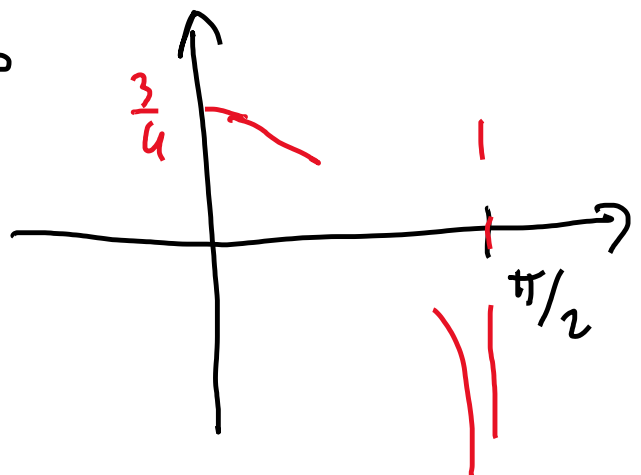
$$f(x) = \frac{x \sin(3x)}{\sin^2(2x)}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x \sin(3x)}{\sin^2(2x)} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x (3x + o(x))}{[2x + o(x)]^2} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{3x^2 + o(x^2)}{4x^2 + o(x^2)} = \frac{3}{4}$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \frac{x \sin(3x)}{\sin^2(2x)} = \frac{\frac{\pi}{2} \sin(\frac{3}{2}\pi)}{\sin^2(\pi)} =$$

$$= \frac{\frac{\pi}{2}(-1)}{0^+} = -\infty$$



Domanda 5)

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \sin x \sin \frac{1}{x} = \text{limitata} \cdot \sin \frac{1}{\infty}$$
$$= \text{limitata} \text{ in } 0 = 0.$$

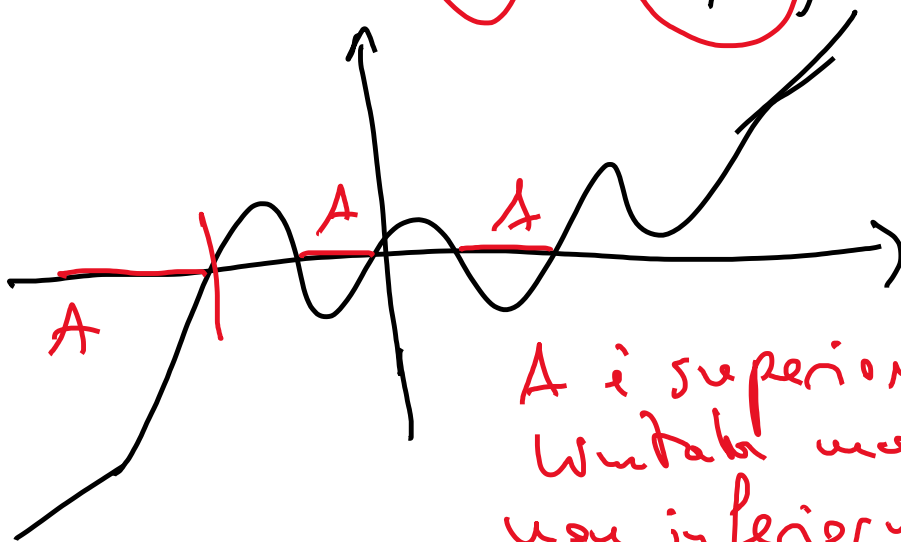
Domanda 6)  $A = \{x \in \mathbb{R} : x^7 + 3e^x + \log|x| < 0\}$

$$f(x) = x^7 + 3e^x + \log|x|$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty + 3 \cdot 0 + \infty = 0$$

$$= x^7 \left( 1 + \frac{3e^x}{x^7} + \frac{\log|x|}{x^7} \right) = -\infty \cdot 1 = -\infty$$



A è superiormente  
limitata ma  
non inferiormente

Domanda 7)  $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$

$$f(x) = \frac{\sqrt{1+x^2} - 1}{e^{(x^3)} - 1}$$

$$(1+t)^d = 1 + dt + o(t)$$

$$t \rightarrow 0 \quad t = x^2$$

$$d = \frac{1}{2}$$

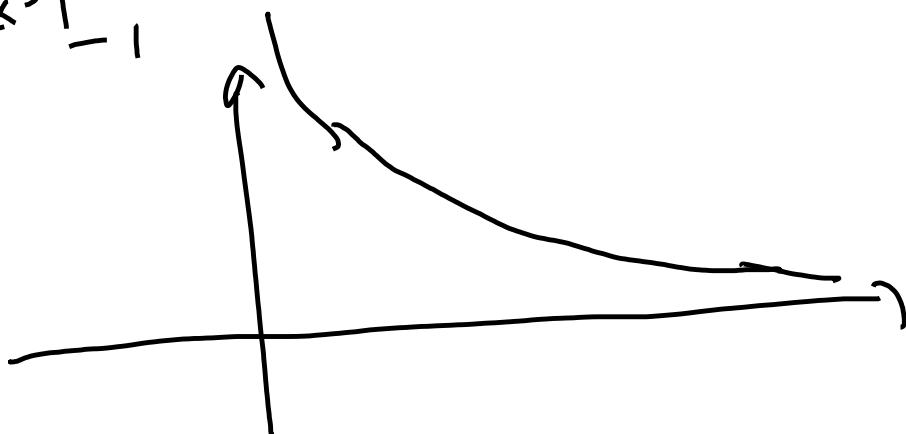
$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \frac{\cancel{1} + \frac{1}{2}x^2 + o(x^2) - \cancel{1}}{\cancel{1} + x^3 + o(x^3) - \cancel{1}}$$

$$e^t = 1 + t + o(t)$$

$$t = x^3$$

$$= \frac{\frac{1}{2} + o(1)}{x + o(x)} \rightarrow \frac{\frac{1}{2}}{0^+} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{1+x^2} - 1}{e^{(x^3)} - 1} = 0$$



$$f(x) > 0 \quad \forall x$$

$$\sqrt{1+x^2} - 1 > 0$$

$$e^{(x^3)} - 1 > 0$$

Domanda 8)

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt[4]{1 + \frac{1}{x}} - 1}{(\sin x)^2 + 1} \left(1 - \cos \frac{1}{x}\right)$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt[4]{1 + \frac{1}{x}} - 1 = \sqrt[4]{1 + \frac{1}{-\infty}} - 1 =$$

$$= \sqrt[4]{1 + 0} - 1 = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 - \cos \frac{1}{x}\right) = 1 - \cos \frac{1}{-\infty} =$$

$$= 1 - \cos 0 = 1 - 1 = 0$$

$$1 \leq \sin^2 x + 1 \leq 2$$

$$\frac{1}{2} \leq \frac{1}{(\sin^2 x + 1)} \leq 1$$

limitata

$$\lim f(x) = 0 \cdot 0 \text{ (limitata)} = 0.$$

Domanda 9)  $f(x) = \frac{\log x}{x-1}$

$$x > 0 \quad x \neq 1$$

$$f: (0, 1) \cup (1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \frac{\log 0^+}{0-1} = \frac{-\infty}{-1} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\log x}{x-1} = \frac{\log 1}{1-1} = \frac{0}{0} ?$$

$$x-1 = t \quad x \rightarrow 1 \Rightarrow t \rightarrow 0 \quad x = 1+t$$

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\log(1+t)}{t} = 1.$$

in  $x=1$  non c'è asintoto verticale.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\log x}{x-1} = 0$$

1 asintoto verticale e uno orizzontale.

Domanda 10)

$$f(x) = \frac{2 \cos x - \sin(x^2) - 2}{x^3}$$

$$f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$$

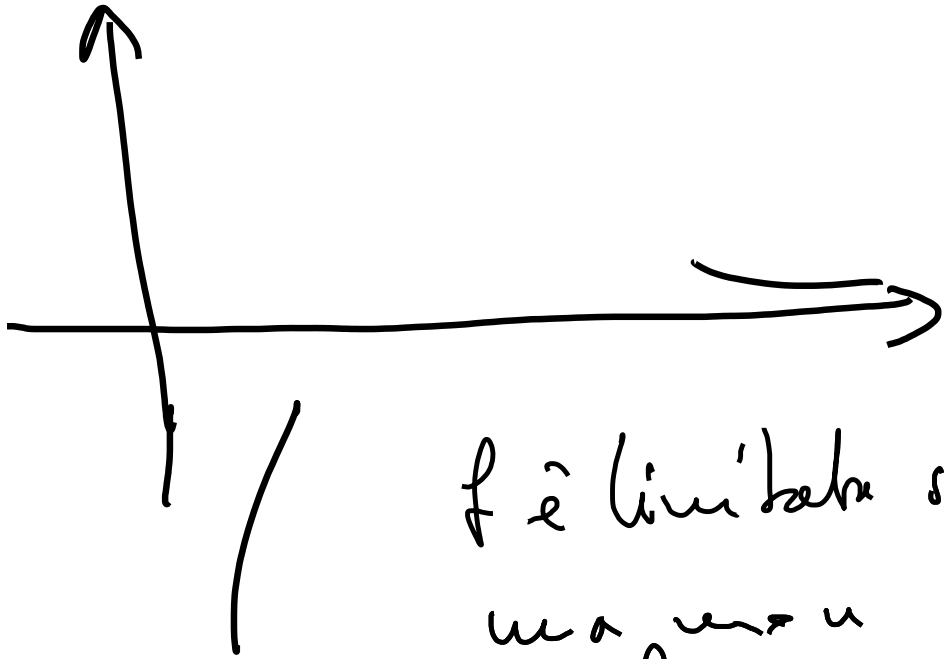
$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \frac{2-0-2}{0} = \frac{0}{0}$$

$$f(x) = \frac{2 \left(1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)\right) - (x^2 + o(x^2)) - 2}{x^3}$$

$$= \frac{\cancel{2} - x^2 + o(x^2) - x^2 + o(x^2) - \cancel{2}}{x^3} = \frac{-2x^2 + o(x^2)}{x^3}$$

$$= \frac{-2 + o(1)}{x} \rightarrow -\infty \text{ se } x \rightarrow 0^+$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2 \cos x - \sin(x^2) - 2}{x^3} = \frac{\text{lim. infer.}}{\infty} = 0$$



$f$  è limitata sup  
ma non  
inferiormente.